

## PENURUNAN METODE ELEMEN BATAS DAN APLIKASINYA PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN LAPLACE

NABIILAH JAHROO PRATIWI, MAHDHIVAN SYAFWAN\*, RIRI LESTARI

*Departemen Matematika dan Sains Data,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.  
\*email : mahdhivan@sci.unand.ac.id*

Diterima ..... Direvisi ..... Dipublikasikan .....

**Abstrak.** Persamaan Laplace merupakan salah satu persamaan diferensial parsial yang banyak muncul pada masalah aliran panas. Dalam beberapa kasus yang lebih riil, persamaan diferensial parsial, termasuk persamaan Laplace, sulit diselesaikan secara eksak, sehingga sebagai alternatifnya digunakan metode numerik. Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada suatu persamaan diferensial parsial adalah Metode Elemen Batas (MEB). Ide dasar dari MEB ini adalah solusi dari persamaan diferensial parsial dinyatakan ke dalam persamaan integral batas yang memuat solusi fundamentalnya. Pada metode ini batas domain dipartisi menjadi sejumlah segmen-segmen garis yang berhingga yang kemudian digunakan untuk mengevaluasi persamaan integral batasnya. Pada makalah ini MEB diimplementasikan pada penyelesaian persamaan Laplace dengan syarat batas campuran, yaitu syarat batas Dirichlet dan syarat batas Neumann. Dari contoh yang didemonstrasikan menggunakan aplikasi MATLAB, diperoleh hasil numerik yang cukup baik dalam menghampiri solusi eksaknya.

**Abstract.** *Laplace's equation is one of the partial differential equations which appears a lot in heat flow problems. In some more real cases, partial differential equations, including Laplace's equations, are difficult to solve exactly, so numerical methods are used as an alternative. One of the numerical methods that is often used to solve the boundary value problem in a partial differential equation is the Boundary Element Method (MEB). The basic idea of MEB is that the solution of the partial differential equation is expressed in the boundary integral equation which contains the corresponding fundamental solution. In this method, the boundary domain is partitioned into a finite number of line segments which are then used to evaluate the boundary integral equation. In this article MEB is implemented in solving the Laplace equation with mixed boundary conditions, namely the Dirichlet boundary conditions and the Neumann boundary conditions. From the example demonstrated using MATLAB application, it is found that the numerical results are quite good in approximating the exact solution.*

**Kata Kunci:** Metode Elemen Batas, Persamaan Laplace, Solusi Fundamental, Syarat Batas.

## 1. Pendahuluan

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan suatu fungsi dengan dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial parsial muncul pada masalah-masalah fisis, salah satunya adalah persamaan Laplace. Persamaan Laplace sering dijumpai pada masalah perpindahan panas, difusi massa, aliran gas ideal, elektrostatis dan masalah mekanika dan fisika lainnya [7].

Dalam beberapa kasus yang lebih riil, persamaan diferensial parsial, termasuk persamaan Laplace, sulit diselesaikan dengan menggunakan metode analitik. Untuk mengatasi permasalahan tersebut digunakan metode numerik untuk mendapatkan solusi hampirannya. Metode elemen batas (disingkat MEB) adalah salah satu metode komputasi numerik yang sudah banyak digunakan pada aplikasi sains dan teknik. Keunikan metode ini adalah dalam reduksi dimensi masalah, dimana masalah dengan domain tiga dimensi dapat direduksi menjadi masalah dua dimensi [1]. Selain itu, kelebihan metode ini adalah kemampuannya dalam menangani masalah untuk domain terbuka (tak terbatas), serta efektif pada perhitungan turunan dari fungsi flux, tegangan, tekanan dan momen [4].

MEB mulai berkembang pada abad ke-19, yang awalnya dikenal dengan istilah *Boundary Integral Equation Method* (BIEM), sebagai metode untuk menyelesaikan masalah fisika matematis yang pertama kali dikerjakan oleh G. Green. Pada tahun 1828, beliau memformulasikan sebuah integral yang mewakili solusi dengan syarat batas Dirichlet dan Neumann pada persamaan Laplace, yang dikenal sebagai fungsi Green. Semenjak penemuan fungsi Green, banyak para peneliti yang mengembangkan MEB [4].

Dalam implementasinya, MEB menggunakan aplikasi komputer seperti MATLAB yang menyediakan fitur lengkap untuk metode numerik seperti MEB yang melibatkan perhitungan matriks. MATLAB memiliki fitur tampilan output grafis yang mudah digunakan, sehingga sangat berguna dalam tahap *post-processing* pada MEB [5].

Pada makalah ini akan dibahas penurunan MEB dan implementasinya pada penyelesaian numerik persamaan Laplace menggunakan aplikasi MATLAB. Kajian pada makalah ini mengeksplorasi kembali studi pada referensi [5]. Kajian serupa juga pernah dibahas oleh Manaqib [6] namun dengan contoh implementasi yang berbeda.

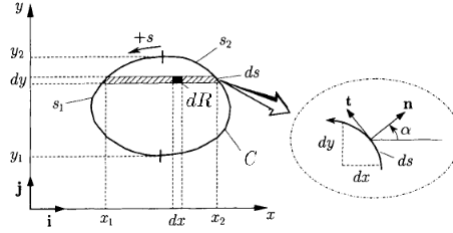
## 2. Teorema Gauss-Green

Teorema Gauss-Green adalah suatu identitas fundamental yang memuat hubungan antara integral dari turunan suatu fungsi  $f$  atas domain  $R$  dengan integral dari fungsi tersebut pada batas  $C$ . Domain suatu fungsi dapat berupa dua dimensi atau tiga dimensi. Pada makalah ini, teorema Gauss-Green akan diturunkan untuk kasus fungsi pada domain dua dimensi.

Integral pada bidang  $R$  dapat ditulis sebagai berikut,

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial x} dR = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(x_2, y) - f(x_1, y)) dy, \quad (2.1)$$

dimana  $x_1 = x_1(y)$  dan  $x_2 = x_2(y)$ . Ilustrasi untuk proses ini diberikan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1: Integral pada domain  $R$  yang dibatasi oleh kurva  $C$ .

Berdasarkan gambar tersebut, diperoleh

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha = n_x \Rightarrow dy = n_x ds, \quad (2.2)$$

$$-\frac{dx}{ds} = \sin \alpha = n_y \Rightarrow dx = -n_y ds, \quad (2.3)$$

dimana  $n_x$  dan  $n_y$  adalah komponen dari vektor satuan  $\mathbf{n}$  yang tegak lurus terhadap batas  $C$  (disebut dengan vektor normal). Akibatnya, persamaan (2.1) menjadi

$$\int_{y_1}^{y_2} (f(x_2, y) - f(x_1, y)) dy = \int_{s_2} f(x_2, y) n_x ds - \int_{s_1} f(x_1, y) n_x ds. \quad (2.4)$$

Pada persamaan (2.4), integrasi pada  $s_1$  dilakukan dalam arah negatif (searah jarum jam) ketika  $y$  bergerak dari  $y_1$  ke  $y_2$ . Dengan menggunakan arah yang seragam untuk integrasi pada  $s$ , kedua suku pada sisi kanan persamaan (2.4) dapat digabungkan sehingga diperoleh

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial x} dR = \int_C f n_x ds. \quad (2.5)$$

Dengan mengubah  $x$  menjadi  $y$  pada persamaan (2.5), diperoleh

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial y} dR = \int_C f n_y ds. \quad (2.6)$$

Jika  $g$  adalah fungsi lain terhadap  $x$  dan  $y$ , maka persamaan (2.5) dan (2.6) menghasilkan

$$\int_R g \frac{\partial f}{\partial x} dR = - \int_R f \frac{\partial g}{\partial x} dR + \int_C f g n_x ds, \quad (2.7)$$

dan

$$\int_R g \frac{\partial f}{\partial y} dR = - \int_R f \frac{\partial g}{\partial y} dR + \int_C f g n_y ds. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) merupakan integral parsial pada dua dimensi dan dikenal dengan Teorema Gauss-Green [4].

### 3. Identitas Kedua Green

Pandang fungsi  $u = u(x, y)$  dan  $u^* = u^*(x, y)$  yang terdiferensialkan dua kali dan kontinu pada  $R$  dan  $C$ . Aplikasikan persamaan (2.7) untuk  $g = u^*$  dan  $f = \frac{\partial u}{\partial x}$ , dan persamaan (2.8) untuk  $g = u^*$  dan  $f = \frac{\partial u}{\partial y}$ , maka masing-masing menghasilkan

$$\int_R u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dR = - \int_R \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dR + \int_C u^* \frac{\partial u}{\partial x} n_y ds \quad (3.1)$$

dan

$$\int_R u^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dR = - \int_R \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} dR + \int_C u^* \frac{\partial u}{\partial y} n_y ds. \quad (3.2)$$

Dengan menambahkan persamaan (3.1) dan (3.2), diperoleh

$$\int_R u^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dR = - \int_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dR + \int_C u^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) ds. \quad (3.3)$$

Dengan melakukan cara yang sama untuk  $g = u$  dan  $f = \frac{\partial u^*}{\partial x}$  pada persamaan (2.7), dan untuk  $g = u$  dan  $f = \frac{\partial u^*}{\partial y}$  pada persamaan (2.8), diperoleh

$$\int_R u \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) dR = - \int_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dR + \int_C u \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial u^*}{\partial y} n_y \right) ds. \quad (3.4)$$

Selanjutnya kurangkan persamaan (3.3) dengan (3.4) menghasilkan

$$\int_R (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*) dR = \int_C \left( u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) ds, \quad (3.5)$$

dimana  $\nabla^2$  dikenal sebagai operator Laplace atau operator harmonik dan didefinisikan sebagai

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

sedangkan

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla = (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$$

adalah operator yang menghasilkan turunan dari fungsi skalar dalam arah  $\mathbf{n}$  [4]. Persamaan (3.5) dinamakan Identitas Kedua Green.

### 4. Persamaan Laplace dan Solusi Fundamental

Persamaan Laplace merupakan bentuk khusus dari persamaan potensial yang diberikan oleh

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in R, \quad (4.1)$$

dimana untuk  $f(x, y) = 0$  dikenal sebagai persamaan Laplace, sedangkan untuk  $f(x, y) \neq 0$  dikenal sebagai persamaan Poisson. Solusi  $u(x, y)$  menyatakan potensial yang dihasilkan di titik  $(x, y)$  pada domain  $R$  karena gaya luar (atau disebut juga dengan sumber)  $f(x, y)$  yang terdistribusi pada  $R$  [4].

Dalam makalah ini akan dibahas persamaan Laplace berikut:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ untuk } (x, y) \in R, \quad (4.2)$$

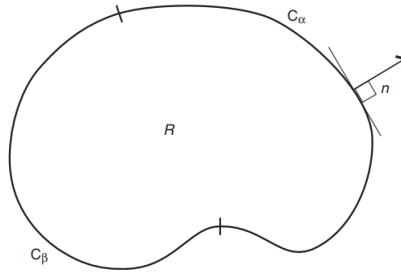
dengan syarat batas campuran

$$u = f(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_\alpha, \quad (4.3)$$

dan

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_\beta, \quad (4.4)$$

dimana  $R$  adalah daerah dua dimensi di bidang- $xy$  yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana  $C = C_\alpha \cup C_\beta$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2 [5].



Gambar 2: Persamaan Laplace dua dimensi pada daerah  $R$ .

Solusi persamaan Laplace (4.2) dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan potensial (4.1) dengan kasus khusus dimana gaya luar yang bekerja hanya di suatu titik pada bidang- $xy$ , katakanlah di titik  $P = (\xi, \eta)$ . Gaya luar seperti ini dikenal dengan sumber titik. Kerapatannya di titik  $Q = (x, y)$  dapat ditulis dalam fungsi delta  $f(Q) = \delta(Q - P)$  dan potensial  $u^* = u^*(Q, P)$  yang dihasilkan di titik  $Q$  memenuhi

$$\nabla^2 u^* = \delta(Q - P). \quad (4.5)$$

Solusi khusus dari persamaan (4.5) disebut solusi fundamental. Solusi ini dapat ditentukan dengan menulis persamaan (4.5) dalam koordinat polar dengan titik asal di  $P$ , yaitu dengan melakukan transformasi  $u^*(x, y) = u^*(r, \theta)$ , dimana  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , dengan  $r = |Q - P| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  dan  $\theta = \arctan \frac{y - \eta}{x - \xi}$ , sehingga menghasilkan[3]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du^*}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = \delta(Q - P). \quad (4.6)$$

Karena solusi  $u^*$  bersifat simetri terhadap  $P$ , maka  $u^*$  tidak bergantung pada  $\theta$ , sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du^*}{dr} \right) = \delta(Q - P). \quad (4.7)$$

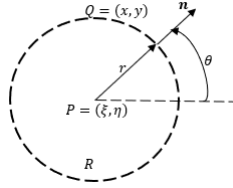
Perhatikan bahwa  $\delta(Q - P)$  bernilai nol kecuali di  $r = 0$ , dimana pada titik tersebut nilainya tak hingga. Oleh karena itu selain di titik  $r = 0$ , persamaan (4.7) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du^*}{dr} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Solusi umum persamaan (4.8) diperoleh dengan integrasi sebanyak dua kali, yaitu

$$u^* = A \ln r + B,$$

dimana  $A$  dan  $B$  adalah konstanta.



Gambar 3: Domain melingkar di  $R$  dengan jari-jari  $r$  dan titik pusat  $P$ .

Untuk mencari solusi khusus, dapat ditetapkan  $B = 0$ . Selanjutnya karena  $u^*$  bersifat simetris terhadap  $P$  (lihat Gambar 3), maka berlaku

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} = A \frac{1}{r} \text{ dan } ds = r d\theta. \quad (4.9)$$

Dalam menentukan konstanta  $A$ , digunakan Identitas Kedua Green yaitu persamaan (3.5) dan ditetapkan  $u = 1$ , sehingga akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\int_R \nabla^2 u^* dR = \int_C \frac{\partial u^*}{\partial n} ds, \quad (4.10)$$

dimana  $R$  adalah lingkaran dengan titik pusat di  $P$  dan jari-jari  $r$ . Dengan menggunakan persamaan fungsi delta, (4.5) dan (4.9), persamaan (4.10) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \int_R \delta(Q - P) dR &= \int_0^{2\pi} A \frac{1}{r} r d\theta, \\ 1 &= A \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

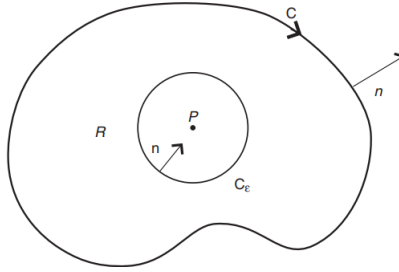
sehingga diperoleh

$$A = \frac{1}{2\pi}.$$

Dengan demikian solusi fundamental diberikan oleh

$$u^* = \frac{1}{4\pi} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2). \quad (4.11)$$

Perhatikan bahwa  $u^*$  pada persamaan (4.11) memenuhi persamaan Laplace (4.2) di setiap titik pada bidang  $R$  kecuali di titik  $P = (\xi, \eta)$  yang mana titik tersebut merupakan titik singular. Jika sekarang ditinjau daerah  $R - C_\varepsilon$ , dimana  $C_\varepsilon$  adalah lingkaran kecil yang memuat dan berpusat di  $P$ , maka  $u^*$  terdefinisi dan  $\nabla^2 u^* = 0$  pada daerah tersebut (lihat Gambar 4).



Gambar 4: Domain selain  $C_\varepsilon$  yang berpusat di  $P = (\xi, \eta)$ .

Dengan kembali menggunakan Identitas Kedua Green, namun sekarang untuk daerah  $\Omega = R - C_\varepsilon$  dan kurva  $C + C_\varepsilon$ , maka didapatkan [5]

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) d\Omega = \int_{C+C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (4.12)$$

Jelas bahwa sisi kiri persamaan (4.12) bernilai nol, sehingga sisi kanannya dapat ditulis menjadi

$$\int_C \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = - \int_{C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (4.13)$$

Untuk menghitung integral pada sisi kanan persamaan (4.13), lakukan transformasi ke dalam koordinat polar dengan jari-jari  $r = \varepsilon$  dan sudut  $\theta = -\alpha$  (searah jarum jam terhadap sumbu  $x$  positif). Dengan menggunakan persamaan (4.9) dengan  $A = \frac{1}{2\pi}$ , diperoleh [2]

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \text{ dan } ds = -\varepsilon d\alpha. \quad (4.14)$$

Dapat ditunjukkan bahwa untuk  $(\xi, \eta) \in R$ , berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} - \left[ u \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right] \varepsilon d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} [u - (\varepsilon \ln \varepsilon) u] d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} (2\pi u(\xi, \eta)) = -u(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Selanjutnya untuk  $(\xi, \eta)$  terletak pada bagian *smooth*  $C$ , integrasi  $C_\varepsilon$  dihitung sepanjang setengah lingkaran, sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi - \left[ u \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon u \right] \varepsilon d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi [u - (\varepsilon \ln \varepsilon)u] d\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} (\pi u(\xi, \eta)) = -\frac{1}{2} u(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Adapun titik  $(\xi, \eta) \notin R \cup C$ , berlaku

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (4.17)$$

Berdasarkan persamaan (4.15), (4.16) dan (4.17) maka integrasi (4.13) yang dihitung di titik  $(\xi, \eta)$  menghasilkan

$$\lambda u(\xi, \eta) = \int_C \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (4.18)$$

dimana

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R \cup C, \\ \frac{1}{2} & \text{jika } (\xi, \eta) \text{ terletak pada bagian } \textit{smooth} C, \\ 1 & \text{jika } (\xi, \eta) \in R. \end{cases} \quad (4.19)$$

Persamaan (4.18) adalah persamaan integral batas untuk persamaan Laplace. Dalam hal ini masalah dalam bentuk persamaan diferensial parsial dengan syarat batas dikonversi ke dalam bentuk masalah persamaan integral yang memuat solusi fundamental persamaan Laplace. Jika nilai di sisi kanan persamaan (4.18) diketahui, maka nilai  $u(\xi, \eta)$  dapat ditentukan untuk setiap titik  $(\xi, \eta)$  di dalam  $R$  [5].

## 5. Konstruksi Metode Elemen Batas

Langkah awal MEB adalah mengaproksimasi batas kurva tertutup  $C$  oleh poligon dengan  $N$  buah segmen garis lurus, yaitu

$$C \approx C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_N,$$

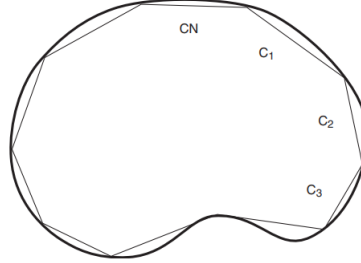
seperti yang diilustrasikan pada Gambar 5.

Segmen-segmen garis ini dibangun dengan memilih  $N$  titik pada batas, misalkan  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  dan didefinisikan  $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$ .  $C_k$  adalah segmen garis lurus yang menghubungkan titik  $(x_k, y_k)$  ke titik  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ . Segmen-segmen garis  $C_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, N$  ini dikenal dengan elemen-elemen batas [5].

Untuk penyederhanaan masalah, diasumsikan  $u$  dan  $\partial u / \partial n$  bernilai konstan di setiap elemen batas. Lebih khusus lagi, nilai di titik tengah setiap elemen diambil menjadi nilai di seluruh elemen, yaitu

$$u \approx \bar{u}_k \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial n} \approx \bar{q}_k \text{ untuk } (x, y) \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1)$$





Gambar 5: Kurva tertutup  $C$  yang diaproksimasi oleh elemen batas  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ .

dimana  $\bar{u}_k$  dan  $\bar{q}_k$  adalah nilai dari  $u$  dan  $\partial u / \partial n$  di titik tengah  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  pada elemen batas  $C_k$ .

Dengan demikian persamaan integral batas (4.18) dapat diaproksimasi oleh

$$\lambda u(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N (\bar{u}_k G_k(\xi, \eta) - \bar{q}_k F_k(\xi, \eta)), \quad (5.2)$$

dimana

$$F_k(\xi, \eta) = \int_{C_k} u^*(\xi, \eta) ds, \quad (5.3)$$

$$G_k(\xi, \eta) = \int_{C_k} \frac{\partial u^*(\xi, \eta)}{\partial n} ds. \quad (5.4)$$

Jika diketahui nilai  $\bar{u}_k$  dan  $\bar{q}_k$ , maka persamaan (5.2) dapat digunakan untuk menentukan nilai  $u(\xi, \eta)$  untuk  $(\xi, \eta) \in R$ . Namun pada masalah nilai batas yang lebih realistis, hanya  $\bar{u}_k$  atau  $\bar{q}_k$  (tidak keduanya) yang diketahui pada setiap batas yang diberikan.

Persamaan (5.2) dapat digunakan sebagai langkah awal untuk mengaproksimasi nilai batas yang tidak diketahui, sebelum menggunakannya lagi untuk mengaproksimasi nilai di titik interior (titik yang berada di domain  $R$ ). Untuk melakukannya, dimisalkan  $(\xi, \eta)$  sebagai titik tengah elemen batas  $C_k$  untuk  $k = 1, \dots, N$ , sehingga diperoleh  $N$  persamaan dengan  $N$  variabel. Karena  $(\xi, \eta)$  berada di  $C_k$ , maka substitusi nilai  $\lambda = 1/2$  ke persamaan (5.2), sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2} \bar{u}_m = \sum_{k=1}^N (\bar{u}_k G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) - \bar{q}_k F_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m)) \text{ untuk } m = 1, 2, \dots, N, \quad (5.5)$$

dimana  $\bar{u}_m^* = \frac{1}{4\pi} \ln((x - \bar{x}_m)^2 + (y - \bar{y}_m)^2)$  dan  $(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$  adalah titik tengah elemen  $C_m$ .

Untuk menentukan nilai-nilai yang belum diketahui, sistem (5.5) perlu ditulis ulang sebagai suatu sistem persamaan dalam bentuk  $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ . Nilai-nilai yang tidak diketahui adalah  $\bar{u}$  atau  $\bar{q}$  dan ini menjadi elemen-elemen di  $\mathbf{z}$ , dengan koefisien-koefisien yang terkait disimpan dalam matriks  $\mathbf{A}$ . Selanjutnya vektor  $\mathbf{b}$  memuat

nilai-nilai yang diketahui. Hal yang perlu dilakukan adalah mengkonstruksi matriks  $\mathbf{A}$  dan vektor kolom  $\mathbf{b}$  sesuai dengan jenis nilai batas di setiap elemen  $\mathbf{z}$ . Dengan kata lain, untuk setiap  $m = 1, 2, \dots, N$ , perlu dikonstruksi

$$\sum_{k=1}^N A_{mk} z_k = \sum_{k=1}^N b_{mk}. \quad (5.6)$$

Di sini  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{b}$  dikonstruksi secara sistematis dengan mempertimbangkan dua kasus, yaitu (a) ketika  $u$  diketahui dan (b) ketika  $q = \partial u / \partial n$  diketahui pada batas  $C_k$ .

Untuk setiap  $m$  (yaitu setiap baris dalam matriks), perlu ditentukan entri  $A_{mk}$  pada matriks  $\mathbf{A}$  dan entri  $b_{mk}$  pada vektor  $\mathbf{b}$  di setiap elemen batas  $C_k$ . Jika  $u$  diketahui pada elemen batas  $C_k$ , maka  $\bar{q}$  menjadi variabel dan entri-entri di  $\mathbf{A}$  diberikan oleh  $A_{mk} = -F_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$ . Adapun entri-entri yang bersesuaian di  $\mathbf{b}$  adalah  $-\bar{u}_k G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$  jika  $k \neq m$  atau  $-\bar{u}_k G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) + \frac{1}{2} u_m$  jika  $k = m$ .

Sebaliknya, jika  $q$  diketahui pada elemen batas  $C_k$ , maka  $u$  menjadi variabel, sehingga entri-entri pada  $\mathbf{b}$  adalah  $\bar{q}_k F_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$ . Adapun entri-entri pada  $\mathbf{A}$  adalah  $G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$  jika  $k \neq m$  atau  $G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) - \frac{1}{2}$  jika  $k = m$ .

Dari penjelasan di atas, maka entri-entri untuk matriks  $\mathbf{A}$  dan vektor  $\mathbf{b}$  dikonstruksi sebagai berikut:

$$A_{mk} = \begin{cases} -F_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \text{jika } u \text{ diberikan pada } C_k \\ G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \text{jika } q \text{ diberikan pada } C_k \text{ dan } k \neq m, \\ G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) - \frac{1}{2} & \text{jika } q \text{ diberikan pada } C_k \text{ dan } k = m \end{cases} \quad (5.7)$$

$$b_{mk} = \begin{cases} \bar{q}_k F_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \text{jika } q \text{ diberikan pada } C_k \\ -\bar{u}_k G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) & \text{jika } u \text{ diberikan pada } C_k \text{ dan } k \neq m, \\ -\bar{u}_k (G_k(\bar{x}_m, \bar{y}_m) - \frac{1}{2}) & \text{jika } u \text{ diberikan pada } C_k \text{ dan } k = m \end{cases} \quad (5.8)$$

Ketika  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{b}$  telah terbentuk, maka  $\mathbf{z}$  dapat diselesaikan, dengan mengingat bahwa  $z_k = \bar{q}_k$  jika  $u$  diberikan pada  $C_k$ , dan  $z_k = \bar{u}_k$  jika  $q$  diberikan pada  $C_k$ . Setelah semua nilai pada batas diketahui, persamaan (5.2) dapat digunakan kembali untuk mendapatkan nilai pada setiap titik di domain  $R$  dengan bantuan aplikasi MATLAB [5].

## 6. Contoh Implementasi

Misalkan diberikan persamaan Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } 0 < y < 1,$$

dengan syarat batas

$$u = 0 \text{ pada } x = 0 \text{ untuk } 0 < y < 1,$$

$$u = \cos(\pi y) \text{ pada } x = 1 \text{ untuk } 0 < y < 1,$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ pada } y = 0 \text{ dan } y = 1 \text{ untuk } 0 < x < 1.$$

Informasi (data) mengenai elemen batas ditulis dalam empat kolom (lihat Tabel 1). Kolom pertama dan kedua masing-masing merupakan koordinat  $x$  dan  $y$  dari titik-titik simpul elemen batas. Selanjutnya kolom ketiga dan keempat masing-masing memuat jenis dan nilai syarat batas di setiap elemen. Untuk jenis syarat batas Dirichlet (ketika  $u$  diketahui) dinyatakan dengan nilai 0, sedangkan syarat batas Neumann (ketika  $q$  diketahui) dinyatakan dengan nilai 1.

Tabel 1: Data input pada elemen batas

x	y	Jenis Syarat Batas	Nilai Syarat Batas
0	0	1	0
0.25	0	1	0
0.5	0	1	0
0.75	0	1	0
1	0	0	0.9239
1	0.25	0	0.3827
1	0.5	0	-0.3827
1	0.75	0	-0.9239
1	1	1	0
0.75	1	1	0
0.5	1	1	0
0.25	1	1	0
0	1	0	0
0	0.75	0	0
0	0.5	0	0
0	0.25	0	0
0	0		

Dalam contoh ini, domain  $R$  berbentuk persegi. Untuk kemudahan, ditetapkan titik-titik simpul elemen batas yang memiliki lebar seragam di sepanjang sisi. Titik-titik simpul elemen batas ini ditunjukkan pada Gambar 6a. Selanjutnya pelabelan titik-titik simpul elemen batas dilakukan dalam arah yang berlawanan arah jarum jam. Pada Gambar 6a, titik simpul  $(0, 0)$  diberi label 1, titik simpul  $(0.25, 0)$  diberi label 2, dan seterusnya. Elemen batas pertama adalah dari titik simpul 1 ke titik simpul 2, elemen batas kedua adalah dari titik simpul 2 ke titik simpul 3, dan begitu seterusnya.

Dengan menggunakan data input dan setelah program MATLAB dijalankan [5], diperoleh surface plot untuk solusi sebagai hasil numerik menggunakan metode elemen batas (lihat Gambar 6 dalam versi penampang atas dan Gambar 7 dalam versi tiga dimensi). Warna pada suatu titik pada interior  $R$  pada gambar tersebut mewakili nilai  $u$  di titik tersebut, dimana degradasi warna dari biru sampai merah bernilai -1 sampai 1.

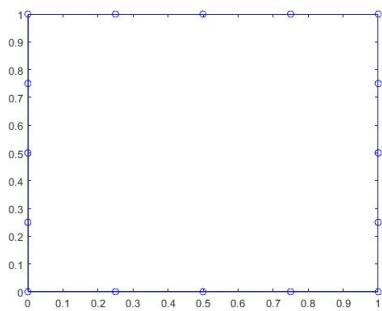
Selanjutnya, solusi eksak dari contoh ini diberikan oleh [5]

$$u(x, y) = \frac{\sinh(\pi x) \cos(\pi y)}{\sinh(\pi)}.$$

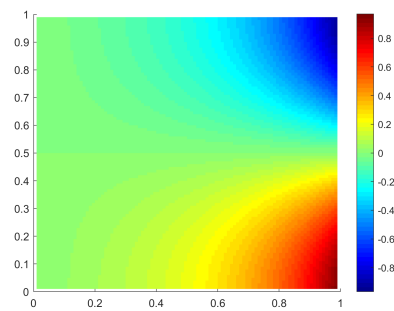
Surface plot untuk solusi eksak ini ditunjukkan pada Gambar 6b (dalam versi penampang atas). Untuk melihat perbandingan hasil numerik dengan solusi eksak, dilakukan evaluasi di beberapa titik  $x$  dan  $y$  pada interior  $R$  beserta galatnya masing-masing, sebagaimana yang diberikan pada Tabel 2. Berdasarkan tabel tersebut terlihat bahwa galat yang dihasilkan cukup kecil, sehingga dapat disimpulkan bahwa MEB memberikan solusi numerik yang cukup baik dalam penyelesaian persamaan Laplace. Galat pada tabel adalah selisih dari nilai numerik dengan nilai eksaknya. Semakin banyak segmen garis yang dibentuk maka solusi numerik akan sangat mendekati solusi eksak.

Tabel 2: Perbandingan nilai numerik dan nilai eksak

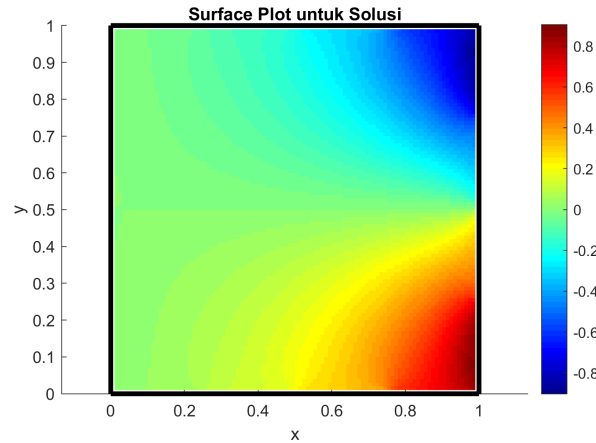
x	y	nilai numerik	nilai eksak	galat
0.25	0.25	0.0540629061902463	0.0531870283400740	0.00087588
0.5	0.25	0.142713936563912	0.140904042339132	0.0018
0.75	0.25	0.320264345551885	0.320098522049454	0.00016582
0.25	0.5	0.000520417	0.000460576	0.000059841
0.5	0.5	0.00294903	0.001220167	0.0017
0.75	0.5	0.001452831	0.002771913	0.0013
0.25	0.75	-0.0540629061902463	-0.0531870283400740	0.00087588
0.5	0.75	-0.142713936563912	-0.140904042339132	0.0018
0.75	0.75	-0.309852450316272	-0.320098522049454	0.0102



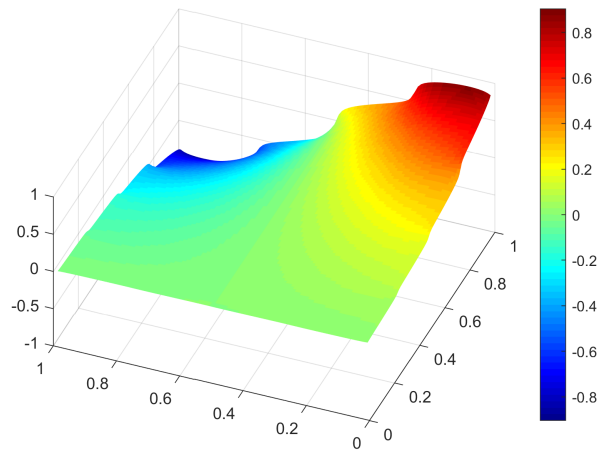
(a) Titik-titik simpul elemen batas.



(b) Surface plot untuk solusi eksak.



Gambar 6: Surface plot untuk solusi numerik menggunakan MEB. Warna pada suatu titik pada interior  $R$  mewakili nilai  $u$  di titik tersebut, dimana degradasi warna dari biru sampai merah bernilai -1 sampai 1.



Gambar 7: Solusi numerik 3 dimensi menggunakan MEB

## 7. Kesimpulan

Metode Elemen Batas (MEB) dalam penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial (PDP) membutuhkan solusi fundamental dari PDP tersebut sebelum membentuk integral batasnya. Integral batas itulah yang akan diselesaikan dengan titik-titik simpul untuk memperoleh suatu sistem persamaan. Selanjutnya, akan diperoleh

persamaan yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi numerik di setiap titik pada domain.

Pada makalah ini telah dibahas penurunan MEB dan implementasinya pada penyelesaian numerik persamaan Laplace. Dari contoh yang didemonstrasikan, diperoleh hasil numerik yang cukup baik dalam menghampiri solusi eksaknya.

### Daftar Pustaka

- [1] Azis, M.I. 2019. *Metode Elemen Batas: Untuk Media Anisotropik Homogen*. Brilian Internasional, Sidoarjo
- [2] Becker, A.A. 1992. *The Boundary Element Method in Engineering: A complete course*. McGraw-Hill Companies, Nottingham
- [3] Fitriani, E.Noviani dan Yudhi. Penyelesaian persamaan Laplace dalam koordinat polar. *Bimaster*. **9**(2):445-452
- [4] Katsikadelis, J.T. 2002. *Boundary Element : Theory and Applications*. Elsevier Science, Oxford
- [5] Keng C.A. 2008. Introducing the boundary element method with MATLAB. *Int. J. Math. Edu. Sci. and Technol*. **39**(4): 505-519
- [6] Manaqib, M. 2017. Boundary element method untuk menyelesaikan masalah syarat batas persamaan Laplace dimensi dua. *Jurnal logika*. **7**(2): 122-136
- [7] Strauss, W. A. 2008. *Partial Differential Equations An Introduction*. John Wiley and Sons, Hoboken

## Lampiran Bahasa Program MATLAB

```
%PRE-PROCESSING
%Membaca koordinat batas, jenis dan nilai %syarat batas
indat=[0 0 1 0;0.25 0 1 0;0.5 0 1 0;0.75 0 1 0;1 0 0 0.9239;
1 0.25 0 0.3827;1 0.5 0 -0.3827;1 0.75 0 -0.9239;1 1 1 0;
0.75 1 1 0;0.5 1 1 0;0.25 1 1 0;0 1 0 0;0 0.75 0 0;0 0.5 0 0;
0 0.25 0 0;0 0 inf inf];}
xb=indat(:,1); %koordinat titik x
yb=indat(:,2); %koordinat titik y
bt=indat(:,3); %jenis syarat batas
bv=indat(:,4); %nilai syarat batas
n=length(xb)-1; %n=jumlah elemen
%Mencari titik tengah dan panjang elemen serta vektor normal
for i=1:n
    xm(i)=0.5*(xb(i)+xb(i+1)); %koordinat titik tengah antara
    x(i) dan x(i+1)
    ym(i)=0.5*(yb(i)+yb(i+1)); %koordinat titik tengah antara
    y(i) dan y(i+1)
    lm(i)=sqrt((xb(i+1)-xb(i))^2 +(yb(i+1)-yb(i))^2); %panjang
    elemen batas
    nx(i)=(yb(i+1)-yb(i))/lm(i); %vektor normal n terhadap x
    ny(i)=(xb(i)-xb(i+1))/lm(i); %vektor normal n terhadap y
end
%PROCESSING
%Mencari aproksimasi untuk nilai batas yang tidak diketahui
%Membentuk matriks A dan vektor b
%Menyelesaikan sistem Ax=b untuk x
for m=1:n
    b(m)=0;
    for k=1:n
        if(k==m)
            G=0.0;
            F=lm(k)/(2.0*pi)*(log(lm(k)/2.0)-1);
            del=1;
        else
            [F,G]=findfg(xm(m),ym(m),xb(k),yb(k),nx(k),ny(k),lm(k));
            del=0;
        end
        if (bt(k)==0)
            A(m,k)=-F;
            b(m)=b(m)+bv(k)*(-G+0.5*del);
        else
            A(m,k)=G-0.5*del;
            b(m)=b(m)+bv(k)*F;
        end
    end
end
```

```

        end
    end
end
z=A\b';
%Menyelesaikan sistem Ax=b dan menyimpannya di z
%Menetapkan aproksimasi nilai batas
for m=1:n
    u(m)=(1-bt(m))*bv(m)+bt(m)*z(m);
    q(m)=(1-bt(m))*z(m)+bt(m)*bv(m);
end

%POST-PROCESSING
%Mencari nilai (s) pada titik yang diperlukan
for j=1:99
    y(j)=0.01*j;
    for i=1:99
        x(i)=0.01*i;
        s(j,i)=0;
        for k=1:n
            [F,G]=findfg(x(i),y(j),xb(k),yb(k),nx(k),ny(k),lm(k));
            s(j,i)=s(j,i)+u(k)*G-q(k)*F;
        end
    end
end
figure(1)
surface(x,y,s,'EdgeColor','none')
hold on

for i=1:n
    xx=[xb(i),xb(i+1)];
    yy=[yb(i),yb(i+1)];
    line(xx,yy,'Color','k','LineWidth',3)
end
title('Surface Plot untuk Solusi')
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([0 1 0 1])
axis equal
%END MAIN PROGRAM

```

Beberapa fungsi yang digunakan dalam program diatas dan disimpan terpisah.

```

%filename findfg.m
function [F,G]=findfg(xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk)
F=(lk/(4*pi))*quadl(@(t) intf(t,xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk),0,1,1e-8);
G=(lk/(2*pi))*quadl(@(t) intg(t,xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk),0,1,1e-8);

```



```
%fungsi=@(t) intf(t,xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk)
%batas bawah=0, batas atas=1
%toleransi=1e-8

%filename intf.m
function y=intf(t,xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk)
y=log((xk-t*lk*nky-xi).^2+(yk+t*lk*nkx-eta).^2);

%filename intg.m
function y=intg(t,xi,eta,xk,yk,nkx,nky,lk)
y=(nkx*(xk-t*lk*nky-xi)+nky*(yk+t*lk*nkx-eta))...
./((xk-t*lk*nky-xi).^2+(yk+t*lk*nkx-eta).^2);
```